

Errores y dificultades de estudiantes de ingeniería en el significado del Teorema de Bayes

Errors and difficulties of engineering students in the meaning of Bayes' Theorem

ARBOLEDA, Leidy J. ¹

ALDANA, Eliécer ²

GUTIÉRREZ, Francisco A. ³

Resumen

Este estudio presenta los significados de estudiantes de Ingeniería de Sistemas sobre el Teorema de Bayes. El objetivo es mostrar los errores y dificultades que ellos presentan sobre el aprendizaje del concepto. Para ello, se utilizó el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico y una metodología cualitativa descriptiva. Los resultados declaran los conflictos semióticos que los estudiantes asignan a los significados del teorema. Estas acepciones permiten concluir que la comprensión lectora de enunciados y símbolos implica el tipo de razonamiento probabilístico.

Palabras clave: probabilidad inversa, conflicto semiótico cognitivo, educación estadística

Abstract

This study presents the meanings of Systems Engineering students about Bayes' Theorem. The objective is to show the errors and difficulties that they present in learning the concept. For this, the theoretical framework of the Ontosemiotic Approach and a descriptive qualitative methodology was used. The results declare the semiotic conflicts that the students assign to the meanings of the theorem. These conclusions evidenced that the reading comprehension of statements and symbols implies the type of probabilistic reasoning.

key words: inverse probability, semiotic cognitive conflict, statistical education

1. Introducción

Diversos estudios en didáctica de la estadística y la probabilidad han proporcionado conceptos acerca de la falta de comprensión en temas relacionados con probabilidad y razonamiento probabilístico, por citar algunos, los trabajos de Batanero, de la Fuente, Díaz y los relacionados como los de Figueroa y colaboradores, entre otros.

En la formación de ingenieros de Sistemas y Computación de la Universidad del Quindío se contempla el curso obligatorio de probabilidad y estadística que está orientado en la comprensión y aplicación de las técnicas estadísticas y probabilísticas que sirven de soporte en la toma de decisiones; en este curso se aborda los temas

¹ Matemáticas con Énfasis en Estadística, Universidad del Tolima, Colombia. Candidata a Magíster en Ciencias de la Educación, Universidad del Quindío, Colombia, leidyj.arboledah@uqvirtual.edu.co

² Doctor en Educación Matemática, Universidad de Salamanca, España. Líder del grupo de investigación GEMAUQ, Universidad del Quindío, Colombia, eliecerab@uniquindio.edu.co

³ Magíster en Enseñanza de la Matemática, Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia. Estudiante de Doctorado en Educación, Universidad Internacional Iberoamericana, México, frankgutierrez87209@hotmail.com

relativos al teorema de Bayes. Teniendo en cuenta lo anterior, y con el fin de aportar a la literatura acerca del aprendizaje de este objeto matemático, surge la necesidad de reconocer los errores y dificultades en la resolución de problemas que involucra el significado del teorema de Bayes, después del proceso de enseñanza. La enseñanza de este objeto matemático se ha limitado al procedimiento más que a la comprensión del concepto, lo que puede ocasionar conflictos cuando las definiciones o propiedades presentadas se limitan a las fórmulas y al aprendizaje memorístico, lo que obstaculiza la capacidad de aplicar este conocimiento tanto en la vida profesional como en la cotidiana, con respecto a lo anterior, esta investigación aporta en cierta medida a la comprensión de algunos conceptos en el razonamiento probabilístico y bayesiano; por tanto, el análisis de los posibles conflictos semióticos en los significados de un objeto matemático es importante para mejorar la enseñanza, de este modo, evitar limitaciones en el aprendizaje de los estudiantes (Salcedo, Molina-Portillo, Ramírez, y Contreras, 2018).

Para esta investigación, se realizó un estudio empírico de los posibles conflictos semióticos mediante la solución de una tarea previamente diseñada, aplicada a un total de 28 estudiantes. El análisis permitió reconocer la dificultad para la comprensión de los enunciados y para su traducción al lenguaje matemático y probabilístico, algunos errores encontrados van desde la partición del espacio muestral y la aplicación de la Fórmula de Bayes.

1.1. Marco teórico

El enfoque ontosemiótico (EOS) propone que los estudiantes aprenden en la medida que logran “utilizar” un objeto matemático para dar solución a una situación problemática, es decir que el objeto matemático cobra sentido en el contexto en uso, estas acciones (u operaciones) son interpretadas en el EOS como sistemas de prácticas matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2007), y suponen buenas prácticas cuando existe una aproximación al sistema de prácticas institucionales. En palabras de Godino, Burgos y Wilhelmi (2020), la progresión en el aprendizaje tiene lugar a medida que el sujeto se apropia de los diversos significados, y reconoce y comprende la trama de objetos implicados en estos (p.155).

Ahora bien, los sistemas de prácticas institucionales que se abordan sobre un objeto matemático se denominan significado institucional, existen distintos tipos de significados institucionales, estos son: referencial, pretendido, implementado y evaluado. Esto desde el punto de vista institucional, con respecto a los significados personales, se destacan tres tipos: el global, el declarado y el logrado. En este estudio nos centramos en el significado institucional implementado, que es el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que finalmente se desarrolla en la clase de matemáticas (Godino, 2002) y en el significado personal declarado, que da lugar a las prácticas efectivamente expresadas en un proceso evaluativo, tanto correctas como incorrectas desde el punto de vista institucional, cuando el significado declarado no evidencia una apropiación del significado institucional se considera la existencia de errores de aprendizaje (Godino, 2003).

En este sentido, se entiende la noción de conflicto semiótico, como el desajuste entre los significados asignados a un objeto matemático por parte de dos sujetos, en este caso estudiantes e instituciones, y que explican de cierto modo las dificultades y limitaciones de aprendizajes y enseñanzas matemáticas efectuadas (Godino, 2002). Los conflictos semióticos no se dan necesariamente por la falta de conocimiento sino de la relación inadecuada de dos términos de una función semiótica (Gea, Fernandes, López-Martín y Arteaga, 2017) definida como el proceso mediante el cual un sujeto crea un significado articulando una expresión (antecedente) y un contenido (consecuente), de acuerdo con un cierto criterio de correspondencia (Figuroa, Baccelli, Prieto, y Moler, 2015).

Estas funciones semióticas son utilizadas, generalmente, para el análisis de la comprensión de significados como producto de prácticas educativas. Es decir, las relaciones que los sujetos establecen entre el objeto y la práctica matemática que realizan (Aznar, Baccelli, Figuroa, Distéfano y Anchorena, 2016).

Si el desajuste se produce entre significados institucionales decimos que, se trata de conflictos semióticos de tipo epistémico; ahora, si se produce en el sistema de prácticas personales, nos referimos a conflictos semióticos de tipo cognitivo; por el contrario, si se trata de la disparidad entre prácticas tanto discursivas como operativas entre sujetos diferentes en interacción comunicativa, hablamos entonces de conflictos semióticos de tipo interaccional (Salcedo, Molina-Portillo, Ramírez, y Contreras, 2018).

Los conflictos semióticos son un instrumento conceptual para analizar procesos de aprendizaje de los objetos matemáticos, que permiten superar las nociones de obstáculo epistemológico, obstáculo didáctico, error conceptual, entre otras (Rojas, 2014). De este modo, los conflictos semióticos pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas ejecutadas (Salcedo, Molina-Portillo, Ramírez, y Contreras, 2018, p. 226).

1.2. Antecedentes

Algunas investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y cuyo objetivo es inferir acerca de los problemas y conflictos que presentan los estudiantes en el aprendizaje y resolución de problemas Bayesianos, resaltamos los trabajos de: Díaz y de la Fuente (2005 y 2006) sobre el razonamiento de la probabilidad condicional y sus implicaciones en la enseñanza de la estadística, y las dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes, respectivamente, en estos trabajos se definen las principales dificultades en la probabilidad condicional, entre ellas, la confusión entre las probabilidades condicional y conjunta, y la comprensión de reglas lógicas del cálculo de probabilidades. Además, explican la confusión entre el papel de condición y condicionado en una probabilidad condicional.

Asimismo, Díaz, Ortiz, y Serrano, (2007a-2007b) agregan que, los estudiantes confunden con frecuencia la probabilidad condicional con una probabilidad simple, con probabilidad conjunta y con probabilidad inversa. Por otro lado, exponen que, los errores van desde la correcta identificación de los sucesos y sus probabilidades hasta la partición y subpartición del espacio muestral. Por su parte, León (2008) afirma que los estudiantes manifiestan tener limitaciones en la comprensión de los enunciados de los problemas, especialmente los relacionados con el teorema de Bayes y reconoce dificultades como la identificación de los eventos y de sus respectivas probabilidades y el uso de esquemas de representación.

Del mismo modo, el trabajo de Figueroa, Baccelli, Prieto, y Moler (2015) sobre funciones semióticas asociadas a los errores más frecuentes en la resolución de problemas Bayesianos, por un lado, la confusión entre: probabilidad inversa y condicional, entre probabilidad condicional y probabilidad simple, entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta. Y por otro, los errores relativos a la partición de un conjunto muestral, la aplicación del teorema de probabilidad total y finalmente de la aplicación del teorema de Bayes.

2. Metodología

Esta investigación se centra en un paradigma de corte cualitativo que según Quecedo y Castaño (2002) se define como “la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable que intentan describir sistemáticamente las características de las variables y fenómenos” (p.7-12).

Dado el tipo de población y la muestra, es pertinente señalar que el diseño de esta investigación corresponde a un diseño de estudio de caso, definido como un análisis detallado, en el cual se observan las características de una unidad individual que consiste en indagar y analizar profundamente los fenómenos que constituyen el ciclo vital de dicha unidad (Bisquerra, 1989), en este caso, profundizar en los errores y dificultades en la resolución de problemas que involucra el teorema de Bayes, así como también, del manejo que se hacen de los elementos de los significados del mismo.

Este estudio fue realizado durante el segundo semestre del año 2019, en el que participaron 28 estudiantes de ingeniería de sistemas y computación, de las jornadas diurna y nocturna de la universidad del Quindío. En el plan de estudio del programa se contempla un curso de “Probabilidad y Estadística” que corresponde al tercer año de la carrera.

A estos estudiantes se les planteó una situación-problema (Figura 1) similar a los presentados en los libros propuestos como guía en la formación de ingenieros, con el fin de indagar posibles conflictos semióticos en la solución que involucra la fórmula de Bayes, cabe resaltar que, estos estudiantes ya habían tenido un proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos relacionados con probabilidad condicional, probabilidad total y teorema de Bayes.

Figura 1
Situación-Problema propuesta

En una operación de llenado automático la probabilidad de que el volumen de llenado sea incorrecto es 0,05; 0,002 y 0,15 cuando el proceso se realiza a baja velocidad, velocidad media y alta velocidad respectivamente. Suponga que el 35% de los contenedores se llena cuando el proceso se efectúa a alta velocidad, el 5% se efectúa a una velocidad media, y el restante se efectúa a baja velocidad.

- a. Represente con alguna gráfica el enunciado
- b. Si se encuentra un contenedor lleno con un volumen correcto, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido llenado cuando el proceso se realizaba a baja velocidad?

Fuente: elaboración de los autores

3. Resultados

La Situación-Problema (SP) propuesta (Figura 1), se centra en la aplicación del significado del teorema de Bayes y en la realización del gráfico según corresponda.

Los elementos principales del significado son de tipo procedimental y de lenguaje tanto gráfico como simbólico, los conceptos que intervienen en SP son: axiomas de probabilidad, probabilidad simple, probabilidad condicional, probabilidad total y los relacionados con los mismos.

Para identificar los conflictos semióticos en la resolución de SP dadas por los estudiantes se definen las siguientes funciones semióticas involucradas en la metodología de la resolución de problemas bayesianos, en la tabla 1 se especifica la relación entre las expresiones, los contenidos y estas funciones:

F1: Determina la correspondencia entre los datos del problema con la identificación del suceso condicionante C

F2: Identifica los sucesos V_i (los sucesos A, M, B) que forman una partición del espacio muestral

F3: Establece la identificación entre los datos del problema y la probabilidad condicional pedida

F4: Asigna la correspondencia entre las probabilidades condicionales dadas en el problema (C) y su representación simbólica

F5: Relaciona las probabilidades condicionales dadas en el problema (C), su complemento (I) y su representación simbólica

F6: Construye un gráfico con los sucesos que forman una partición del espacio muestral y los sucesos I y C

F7: Establece una relación entre las probabilidades dadas y el cálculo de probabilidades conjuntas

F8: Asigna una relación entre las probabilidades conjuntas y el cálculo de la Probabilidad Total

F9: Vincula la probabilidad conjunta, probabilidad total y el cálculo de la fórmula del teorema de Bayes

Tabla 1
Funciones Semióticas que favorecen la resolución de la Situación-Problema

EXPRESIÓN	FUNCIÓN SEMIÓTICA	CONTENIDO	
Si se encuentra un contenedor lleno con un volumen correcto	F1	Suceso que ocurrió	C:{Volumen de llenado correcto}
El 35% de los contenedores se llena cuando el proceso se efectúa a alta velocidad, el 5% se efectúa a una velocidad media, y el restante se efectúa a baja velocidad.	F2	Sucesos que forman una partición del espacio muestral cuyas probabilidades suman 1	A: {El llenado automático se efectúa a alta velocidad} P (A)=0,35 M: {El llenado automático se efectúa a velocidad media} P (M)=0,05 B: {El llenado automático se efectúa a baja velocidad} P (B)=0,60
Si se encuentra un contenedor lleno con un volumen correcto, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido llenado cuando el proceso se realizaba a baja velocidad?	F3	Probabilidad pedida	Probabilidad de que el contenedor haya sido llenado a baja velocidad dado que el volumen de llenado es correcto $P(B C) = P(B \cap C) / (P(C))$
En una operación de llenado automático la probabilidad de que el volumen de llenado sea incorrecto es 0,05; 0,002 y 0,15 cuando el proceso se realiza a baja	F4	Probabilidades condicionales dadas en forma coloquial. Probabilidades condicionales dadas en forma simbólica	Probabilidad de que el llenado sea incorrecto dado que se efectúa a baja velocidad $P(I B) = 0,05$ Probabilidad de que el llenado sea incorrecto dado que se efectúa a velocidad media $P(I M) = 0,002$ Probabilidad de que el llenado sea incorrecto dado que se efectúa a alta velocidad $P(I A) = 0,15$

velocidad, velocidad media y alta velocidad respectivamente	F5	Probabilidades condicionadas según F1	Probabilidad de que el llenado sea correcto dado que se efectúa a baja velocidad $P(C B) = 1 - P(I B) = 0,95$ Probabilidad de que el llenado sea correcto dado que se efectúa a velocidad media $P(C M) = 1 - P(I M) = 0,998$ Probabilidad de que el llenado sea correcto dado que se efectúa a alta velocidad $P(C A) = 1 - P(I A) = 0,85$
Gráfico de los sucesos que forman una partición del espacio muestral y del suceso que ocurrió	F6	<pre> graph LR Root(()) --- B["P(B) = 0,6"] Root --- M["P(M) = 0,05"] Root --- A["P(A) = 0,35"] B --- B_C["P(C B) = 0,95"] B --- B_I["P(I B) = 0,05"] M --- M_C["P(C M) = 0,998"] M --- M_I["P(I M) = 0,002"] A --- A_C["P(C A) = 0,85"] A --- A_I["P(I A) = 0,15"] </pre>	
Probabilidad conjunta	F7	$P(B \cap C) = P(B) \times P(C B) = 0,57$ $P(M \cap C) = P(M) \times P(C M) = 0,05$ $P(A \cap C) = P(A) \times P(C A) = 0,29$	
Probabilidad total (F1)	F8	$P(C) = P(B) \times P(C B) + P(M) \times P(C M) + P(A) \times P(C A)$ $P(C) = 0,9174$	
Teorema de Bayes (F3)	F9	$P(B C) = P(B \cap C) / P(C)$ $P(B C) = (P(B) \times P(C B)) / P(C)$ $P(B C) = 0,57 / 0,9174 = 0,6213$	

Fuente: elaboración de los autores

Una vez analizadas las respuestas de los 28 estudiantes, clasificamos los errores y las dificultades más comunes, en la Tabla 2 se expone el listado de estos conflictos de mayor a menor frecuencia

Tabla 2
Conflictos Semióticos en la resolución de SP

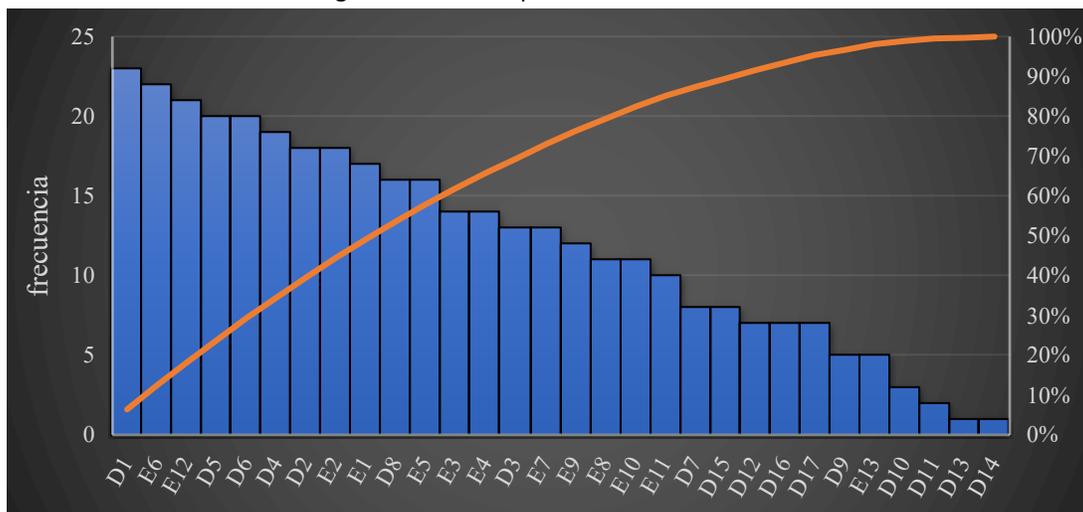
Dificultades		Errores	
Traducción entre lenguajes (verbal, simbólico, gráfico, numérico)	D1	Notación probabilística	E6
Identificar probabilidad condicional	D5	Cálculo de la probabilidad inversa	E12
Identificar el procedimiento a seguir	D6	Identificar probabilidad condicional	E2
Identificar sucesos contrarios (suceso y su complemento)	D4	Asignar los datos a cada uno de los conceptos del enunciado del problema	E1
Identificación de los datos del problema	D2	Construcción de diagramas (representación gráfica)	E5
Diferenciar probabilidad condicional y probabilidad inversa	D8	Identificar probabilidad simple	E3

Aplicación de axiomas de probabilidad	D3	Cálculo de sucesos contrarios (suceso y su complemento)	E4
Dificultad para diferenciar probabilidad condicional y probabilidad simple	D7	Partición del espacio muestral	E7
Diferenciar probabilidad inversa y probabilidad simple	D15	Cálculo de la probabilidad condicional	E9
Diferenciar probabilidad conjunta y probabilidad inversa	D12	Cambio de porcentajes-decimales	E8
Identificar el numerador de la fórmula de Bayes	D16	Cálculo de la probabilidad conjunta	E10
Recordar el denominador de la fórmula de Bayes	D17	Cálculo de la probabilidad total	E11
Diferenciar probabilidad condicional y probabilidad total	D9	Operaciones básicas	E13
Diferenciar probabilidad condicional y probabilidad conjunta	D10		
Diferenciar probabilidad conjunta y probabilidad simple	D11		
Diferenciar probabilidad conjunta y probabilidad total	D13		
Diferenciar probabilidad total y probabilidad simple	D14		

Fuente: elaboración de los autores

El diagrama de Pareto (gráfica 1) explica el 80% del problema mediante los conflictos semióticos: D1, E6, E12, D5, D6, D4, D2, E2, E1, D8, E5, E3, E4, D3, E7 y E9. Esto quiere decir que las dificultades en la comprensión del teorema de Bayes se deben generalmente por los conflictos semióticos D1 y E6 que, como se dijo anteriormente en la tabla 2 se presentan con mayor frecuencia.

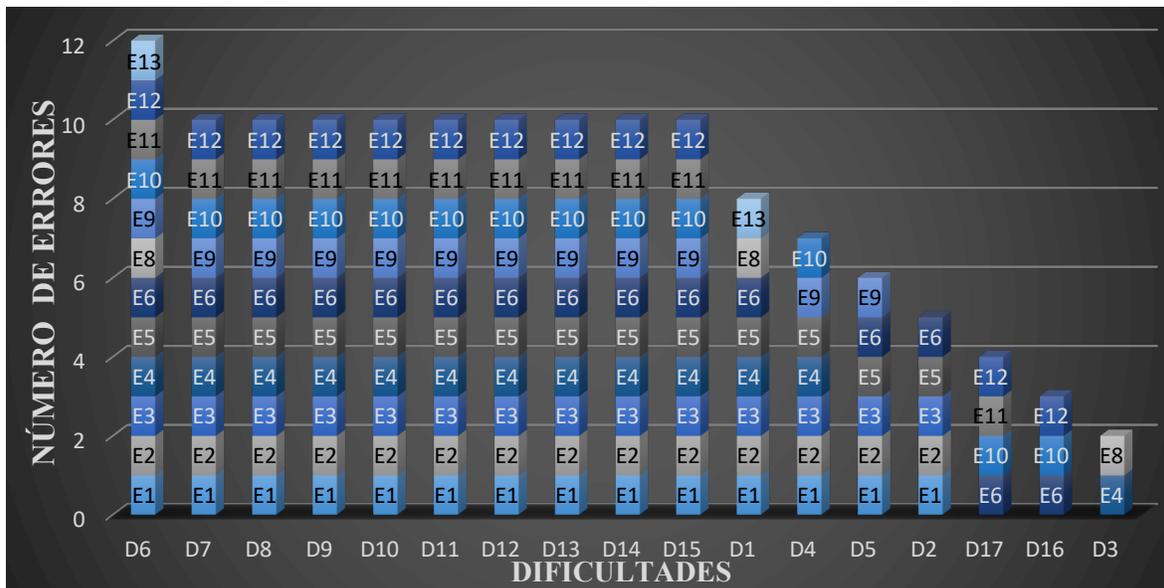
Gráfica 1
Diagrama de Pareto para conflictos semióticos



Fuente: elaboración de los autores

A partir de la observación de los posibles conflictos semióticos, podemos apreciar una relación entre los errores y las dificultades, la gráfica 2 representa los errores en función de cada dificultad contemplada, es decir los errores “explicados” con cada dificultad. Y en la tabla 3, se expresan las funciones semióticas y el acoplamiento con los posibles conflictos semióticos.

Gráfica 1
Errores vs Dificultades



Fuente: elaboración de los autores

Tabla 3
Conflictos semióticos vs Función semiótica

		FUNCIÓN SEMIÓTICA														
		F1		F2		F3		F4/F5		F6		F7		F8		F9
CONFLICTOS SEMIÓTICOS	D2	E6	D1	E1	D2	E2	D1	E1	D1	E1	D10	E6	D9	E6	D2	E2
	D4	E7	D2	E3	D6	E3	D2	E2	D2	E2	D11	E10	D13	E11	D5	E3
	D7		D3	E4	D8	E6	D3	E3	D4	E3	D12	E13	D14	E13	D6	E6
	D9		D4	E6	D12	E7	D4	E4	D5	E5	D13				D7	E8
	D14		D7	E7	D15	E8	D5	E6	D7	E6					D8	E9
	D17			E8	D16		D6	E8		E8					D9	E10
					D17		D7	E9		E9					D10	E11
							D8	E13							D11	E12
							D9								D12	E13
							D10								D13	
															D14	
															D15	
															D16	
															D17	

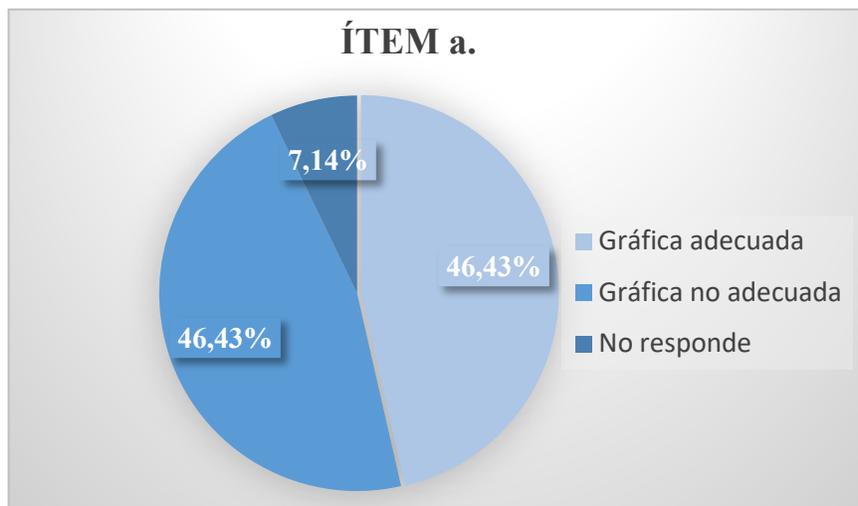
Fuente: elaboración de los autores

3.1. Análisis ítems a y b

En solución de los ítems a. y b. el estudiante debe reconocer los datos de SP, posteriormente traducir del lenguaje coloquial al simbólico y del simbólico al gráfico. En el caso del lenguaje simbólico, debe asignar letras que representen cada suceso y realizar operaciones básicas.

Según los resultados de las respuestas dadas por los estudiantes encontramos el siguiente análisis:

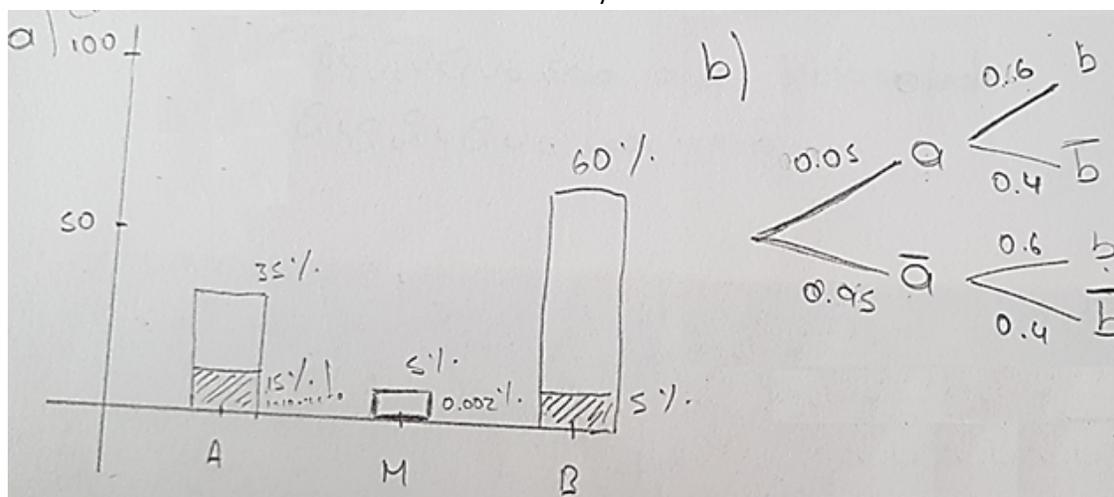
Gráfica 3
Análisis ítem a



Fuente: elaboración de los autores

En la gráfica 3 (ítem a) encontramos que, el 46,43% de los estudiantes utilizan un diagrama adecuado para representar el enunciado de SP propuesto, por el contrario, el 46,43% hacen un mal planteamiento y el 7,14% restante no responden al ítem, cabe resaltar que un estudiante elaboró dos gráficas —una no adecuada y una adecuada mal planteada— para el mismo enunciado (figura 3), posiblemente, este estudiante interpreta los ítems de manera independiente y no como parte del mismo procedimiento.

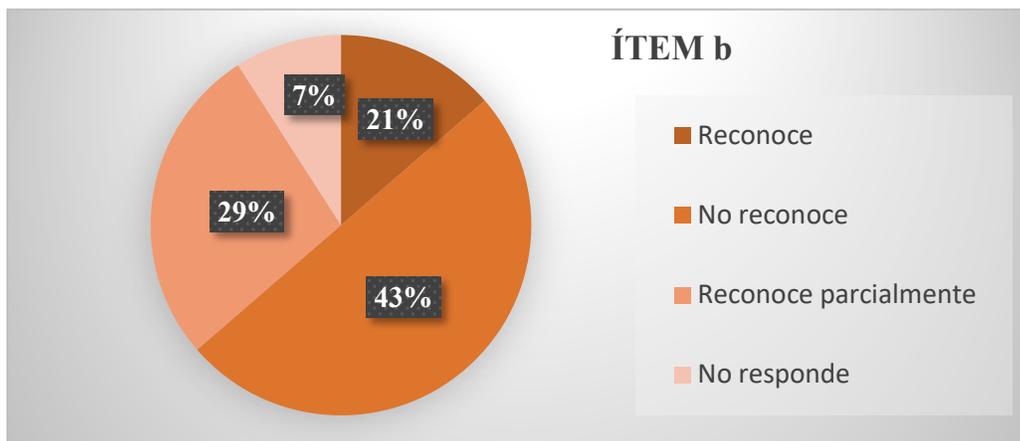
Figura 2
Gráficas ítems a y b de A15



Fuente: elaboración de los autores

En el ítem b. se espera que el estudiante identifique que SP involucra el teorema de Bayes para dar respuesta a la pregunta, sin embargo, en la gráfica 4, podemos observar que, solo el 21% resuelve correctamente el ítem, otro 43% de los estudiantes tienen la intuición de que debe aplicar probabilidad condicional inversa, aunque no recuerdan con exactitud la fórmula de Bayes; por otro lado, encontramos que el 36% no reconoce el procedimiento a seguir o no responde al ítem respectivo (figuras 4) asimismo, se evidencia cierto grado de desmotivación, una parte en la actitud en el momento de la prueba, con expresiones corporales asociadas al desagrado, y otra evidenciada en la respuesta con tinte sarcástico (figuras 5). Solo el 43% de los alumnos utilizan argumentos basados en los cálculos para dar una respuesta las preguntas asociadas a SP.

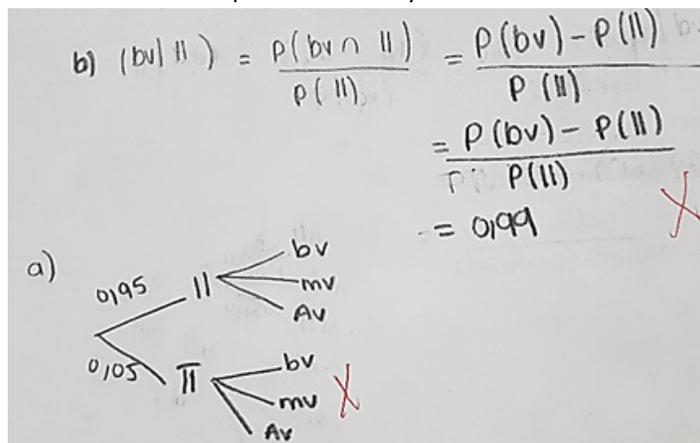
Gráfica 2
Análisis ítem b



Fuente: elaboración de los autores

Figura 3

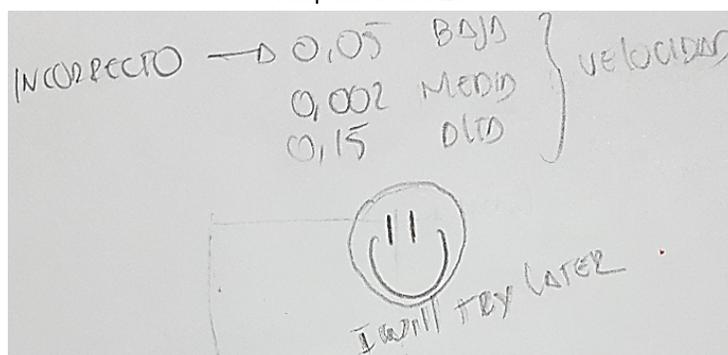
Respuestas ítems a y b de A20



Fuente: elaboración de los autores

Figura 4

Respuesta de A28



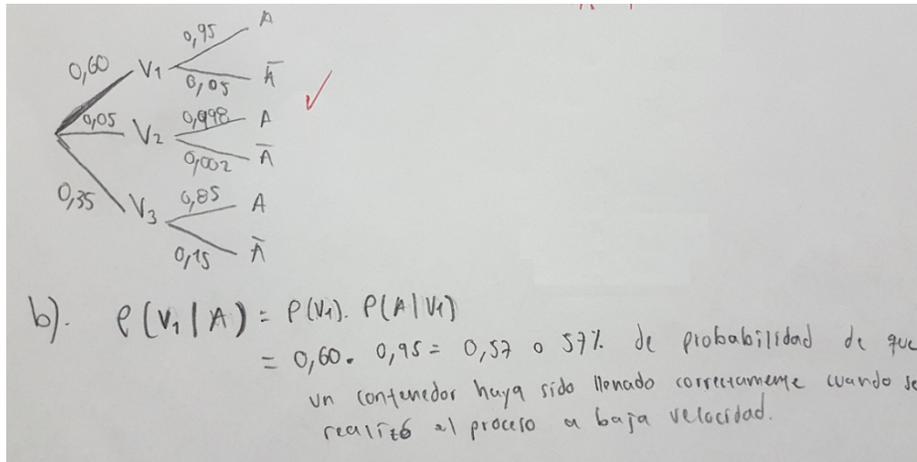
Fuente: elaboración de los autores

Los diagramas de árbol son una de las gráficas más comunes asociadas al teorema de Bayes, y uno de los medios que favorecen la comprensión de este objeto matemático (de Hierro, Batanero y Beltrán, 2018), sin embargo, en

este estudio exponemos la dificultad que tienen los estudiantes para interpretar de esta manera los datos en una situación-problema propuesta, y a la vez, de asociar esta información (de la gráfica) en la fórmula de probabilidad inversa.

Además, tenemos que, del 46% de los estudiantes que lograron el árbol de decisión del ítem a. con los datos correctamente posicionados, el 54% no logró desarrollar correctamente el ítem b. generalmente, estos estudiantes presentaban probabilidad conjunta como respuesta —conflicto semiótico D12— (ver figura 6). Por otro lado, encontramos que, los estudiantes no recuerdan el denominador de la fórmula de Bayes (D17), así que, asignan a la probabilidad total el valor de la probabilidad condicional dada (conflictos semióticos D9-E11 de A8).

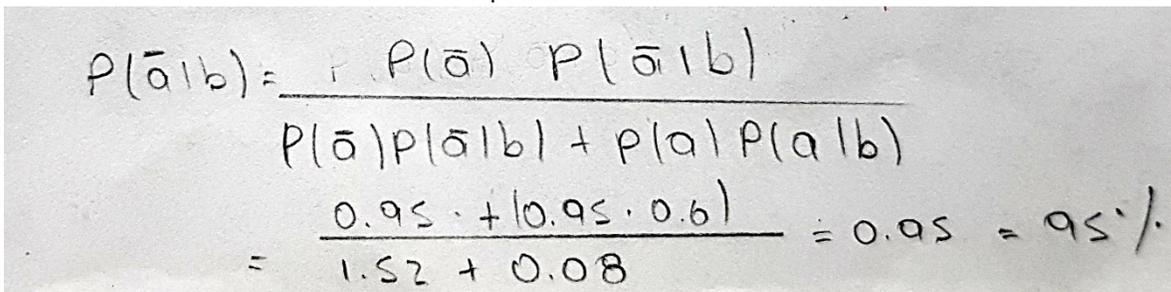
Figura 5
Respuestas ítems a y b de A11



Fuente: elaboración de los autores

Otro escenario relacionado con diagramas de árbol, es el de aquellos estudiantes que realizaron este tipo de gráfico, pero con los datos mal ubicados como en la figura 3, estos estudiantes, además presentan dificultades para recordar la fórmula de Bayes. En las figuras 3 y 7 se evidencia los conflictos semióticos —D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8, D9, D15, D16, D17, E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12 y E13— del estudiante A15.

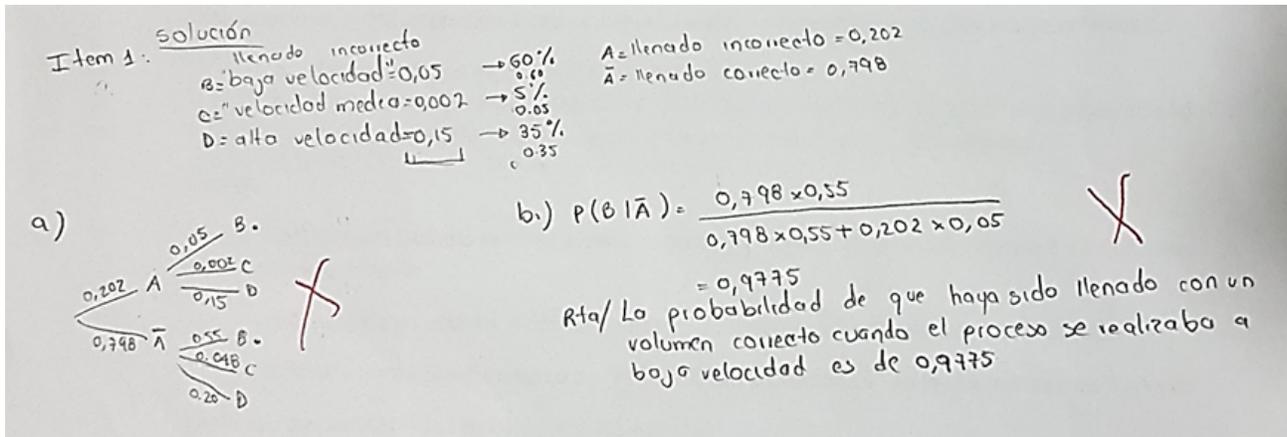
Figura 6
Respuesta ítem b. de A15



Fuente: elaboración de los autores

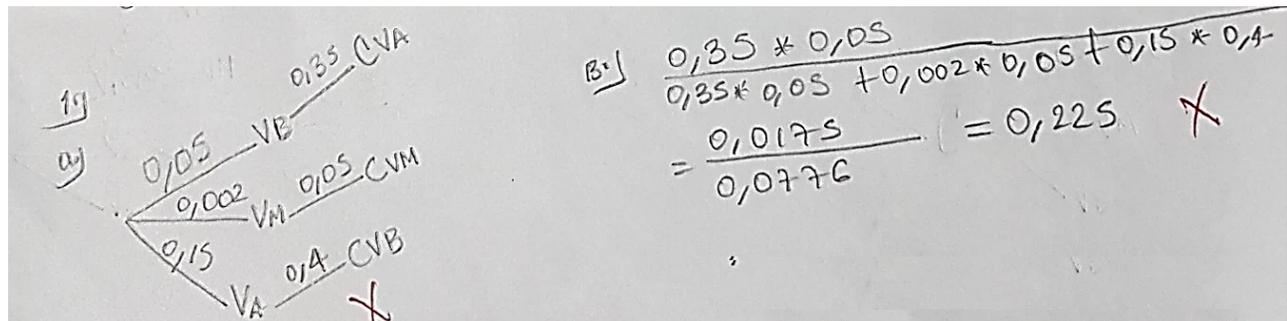
Por el contrario, aquellos estudiantes que sabían que debían aplicar el teorema de Bayes y que recordaban esta fórmula, no lograron dar una respuesta correcta dado que la gráfica, como lo dije anteriormente, no estaba bien planteada, a continuación, podemos observar estos casos en las figuras 8, 9 y 10; Para estos casos podemos evidenciar los conflictos semióticos más comunes D1, D2, D3, D4, D5, D7, D8, D15, E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E9, E10, E11 y E12.

Figura 7
Respuestas ítems a y b de A21



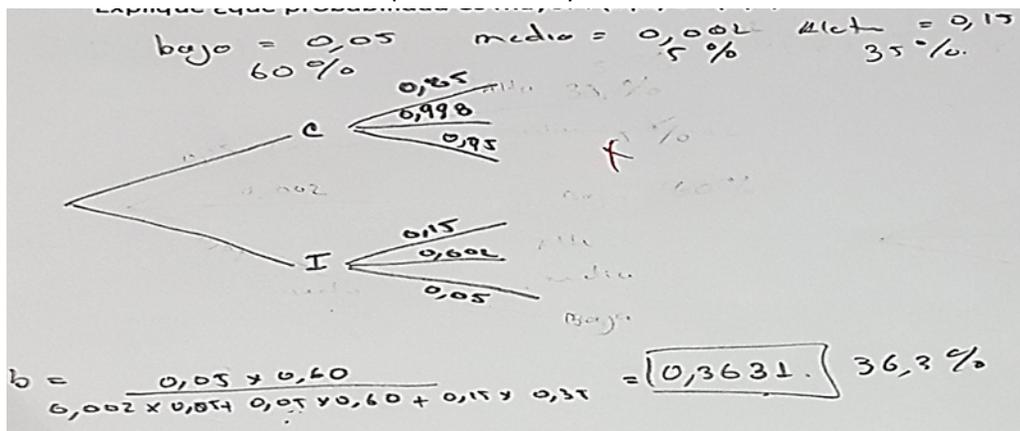
Fuente: elaboración de los autores

Figura 8
Respuestas ítems a y b de A27



Fuente: elaboración de los autores

Figura 9
Respuestas ítems a y b de A25

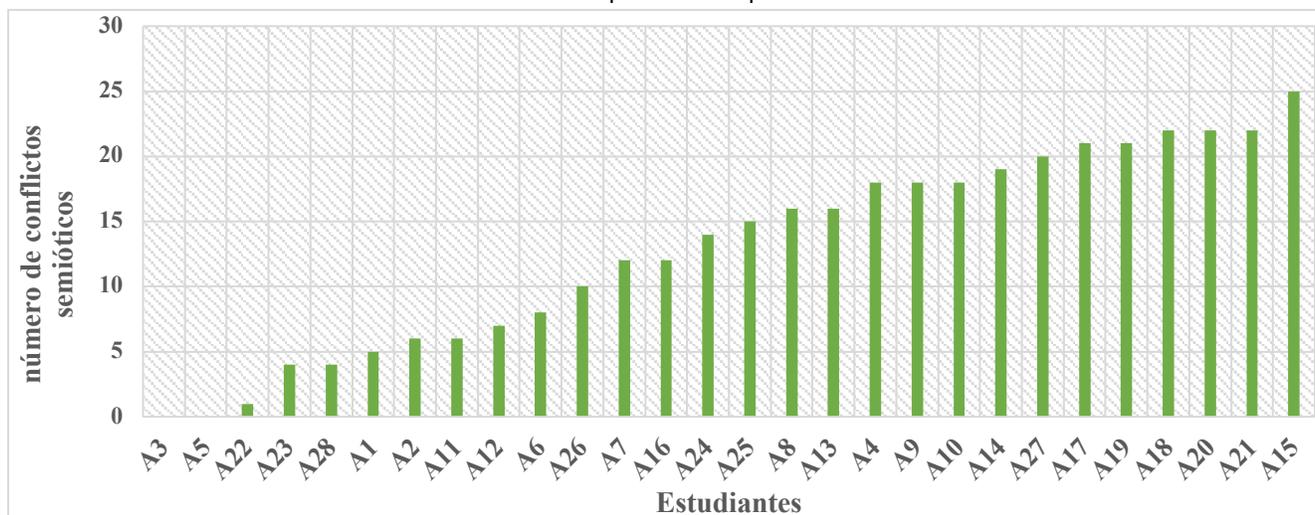


Fuente: elaboración de los autores

Dada las observaciones anteriores y de la información recopilada de las respuestas de cada estudiante que realizó la tarea, realizamos la exploración de la cantidad de conflictos presentados por cada uno, como se presenta en la gráfica 5. Cabe resaltar que, solo el 21% de los estudiantes realizaron la tarea correctamente, por lo cual, la

cantidad de conflictos semióticos no garantiza una respuesta correcta a la resolución de SP. Como podemos observar, el estudiante que presentó más conflictos semióticos, es el estudiante A15 y aunque no es evidente, el estudiante A28 que presenta menos de 5 fue el único estudiante que no completó la actividad.

Gráfica 3
Número de conflictos presentados por cada estudiante



Fuente: elaboración de los autores

4. Conclusiones

Se concluye que, los conflictos semióticos más frecuentes están relacionados con las limitaciones de la comprensión lectora de enunciados que implican un razonamiento probabilístico —D1-E5; D5-E3; D6-E8; y D4-E4-E7—, y con la interpretación de datos en términos simbólicos de las probabilidades, es decir, la identificación de cada uno de los datos del problema expuesto —D1-E6; D2-E1; y D8-E2—.

Se evidenció lo que indica Díaz (2005), en el sentido que, los estudiantes no lograron utilizar los conocimientos adquiridos en la enseñanza en una situación puesta en contexto, lo que indica la necesidad de enfatizar en una formación crítica del individuo en términos estadísticos, una enseñanza de la estadística basada en aplicaciones tanto en situaciones de la vida cotidiana como en contextos relacionados con las profesiones de los estudiantes como lo han afirmado autores como Carrera (2002), Batanero y Díaz (2011), y Rodríguez, Pérez, Diéguez y Sánchez (2014).

Con respecto a la construcción de diagramas, una de las principales herramientas de representación y deducción en el ámbito de la probabilidad (de Hierro, Batanero y Beltrán, 2018) como son los árboles de decisión favorecen en gran medida en la construcción del significado de la fórmula del Teorema de Bayes. Por tanto, se recomienda hacer mayor énfasis en el diseño de este tipo de gráficas durante el proceso de enseñanza de objetos matemáticos de probabilidad y reforzar los argumentos operacionales que facilite el uso de expresiones simbólicas relacionadas con la fórmula de Bayes a partir de los diagramas.

Como lo han concluido las investigaciones de León (2008) y Figueroa, Baccelli, Prieto, y Moler (2015), el olvido tanto del numerador como el denominador generan un número importante de conflictos semióticos, este número es mucho mayor cuando no se identifican correctamente los datos del problema y los conceptos que intervienen en el significado del teorema de Bayes.

4.1. Reconocimientos

Este estudio de investigación ha sido realizado en el marco del proyecto Significados del Proceso Investigativo para la Formación de Profesores de Matemáticas. Aportes de un Semillero con enfoque en Aprendizaje Social en Comunidades de Práctica, con código 954 ante la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad del Quindío y bajo la coordinación del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la Universidad del Quindío “GEMAUQ”, y en el Semillero de Investigación en Educación Matemática “SIEM.

Referencias bibliográficas

- Aznar, A., Baccelli, S., Figueroa, S., Distéfano, M., y Anchorena, S. (2016). Las Funciones Semióticas como instrumento de diagnóstico y abordaje de errores. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 670-690. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=2912/291245779019>
- Batanero, C., y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada, España. Universidad de Granada: Departamento de didáctica de la matemática Recuperado de <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf>
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. (E. CEAC, Ed.). Barcelona (España). Recuperado de https://www.academia.edu/38170554/METODOLOG%C3%8DA_DE_LA_INVESTIGACI%C3%93N_EDUCATIV_A_RAFAEL_BISQUERRA.pdf
- Carrera, E. de. (2002). Teaching Statistics in Secondary School. an Overview: From the Curriculum To Reality®, 1–5. Recuperado de https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/9c1_deca.pdf
- De Hierro, A. F. R. L., Batanero, C., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria. *Épsilon*, (100), 49-63. Recuperado de https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon100_8.pdf
- Díaz, C. (2005). Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios. *Suma*, 48, 45–50. Recuperado de <http://www.ugr.es/~batanero/articulos/falacia.pdf>
- Díaz, C., y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza estadística. *Epsilon*, 59(1), 245–260. Recuperado de https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/epsilon_condicional.pdf
- Díaz, C., y Fuente, I. de la. (2006). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes: Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática*, 18(6), 75–94. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/405/40558507004.pdf>
- Díaz, C., Ortiz, J., y Serrano, L. (2007a). Dificultades de los estudiantes de psicología en el cálculo de probabilidades inversas mediante el teorema de Bayes. *Publicaciones: Facultad de Educación y Humanidades Del Campus de Melilla*, 37, 141–156. Recuperado de <https://pdfs.semanticscholar.org/9bdb/ee3e474b9fd0561a9e9cad37c6a919a535db.pdf>
- Díaz, C., Ortiz, J., y Serrano, L. (2007b). Un estudio experimental de las dificultades de los estudiantes en la aplicación del teorema de Bayes. *Investigación En Educación Matemática XI*, 199–208. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2697032>
- Gea, M., Fernandes, J., López-Martín, M. y Arteaga, P. (2017). Conflictos semióticos relacionados con la organización de datos bidimensionales en libros de texto de Bachillerato. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso*

International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.
Recuperado de, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.htm l

- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques* 22, (2/3):237-284. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf
- Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado de <https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/teoriafs.PDF>
- Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/225114310_The_onto-semiotic_approach_to_research_in_mathematics_education
- Godino, J., Burgos, M., y Wilhelmi, M. (2020). Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 38(1), 147-164. Recuperado de <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2906>
- Figuroa, S., Baccelli, S., Prieto, G., y Moler, E. (2015). Funciones semióticas asociadas a los errores más frecuentes en la resolución de problemas Bayesianos. *Revista de Educación Matemática*, 0. Recuperado de <https://revistas.psi.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10165/10816>
- León Gómez, N. (2008). Errores y dificultades en la resolución de problemas verbales inherentes al teorema de Bayes: Un Caso con Futuros Profesores de Matemática. *Paradigma*, 9(2). Recuperado de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512008000200011
- Quecedo L., y Castaño G. (2002). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. *Revista de psicodidáctica*.14, 5-39. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/175/17501402.pdf>
- Rodríguez, M., Pérez, A., Diéguez, R., y Sánchez, A. (2014). La formación estadística universitaria orientada a la solución de problemas profesionales. *Pedagogía Universitaria*, 19(1), 30–47. Recuperado de <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=fua&AN=96118558&lang=es&site=ehost-live>
- Rojas Garzón, P. (2014). Conflictos Semióticos en un Contexto Algebraico: Un Análisis de las Producciones de los Estudiante. *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet*, 11(1). <https://doi.org/10.18845/rdmei.v11i1.1967>
- Salcedo, A., Molina-Portillo, E., Ramírez, T., y Contreras, J. (2018). Conflictos semióticos sobre estadística en libros de texto de matemáticas de primaria y bachillerato. *Revista de Pedagogía*, 39(104), 223-244. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/328430140_Conflictos_semioticos_sobre_estadistica_en_libros_de_texto_de_matematicas_de_primaria_y_bachillerato